Антонио Грамши

АЛГЕБРА РИТМОВ

Часть 2

2.2 Бинарные операции над ритмами

Бинарная операция ставит в соответствие любой упорядоченной паре элементов некоторого множества третий элемент этого же множества. Например, бинарная операция сложения, заданная на множестве действительных (или комплексных) чисел ставит в соответствие произвольной паре действительных (или комплексных) чисел a и b некоторое действительное (или комплексное) число c, называемое их суммой, то есть $a+b=c$. В случае суммы бинарная операция *коммутативна*, то есть $a+b=b+a$, но так бывает далеко не всегда. Именно поэтому в определении бинарной операции требование упорядоченности пары элементов существенно.

В нашем случае каждой паре ритмов из множества всевозможных ритмов будет ставиться в соответствие третий ритм из этого же множества, не обязательно отличный от исходных двух. Если обозначить обобщенную бинарную операцию звездочкой, то такое соответствие можно выразить следующим образом: $A*B=C$, где A, B, C – некоторые ритмы.

2.2.1 Сложение ритмов

В музыкальной практике употребляются две операции, которые напоминают сложение в общеупотребительном смысле (в применении, например, к натуральным числам, векторам и матрицам). Это *совмещение* и *конкатенация*.

2.2.1.1 Совмещение

Совмещение[1] (или *сложение путем совмещения*) удобно рассматривать, используя позиционную запись. Будем обозначать эту операцию знаком “+”. Пусть даны два ритма R_1 и R_2 Допустим, что число разрядов в позиционной

---

[1] Эту операцию формализовал и предложил для рассмотрения в качестве сложения ритмов мой коллега, биолог и любитель музыки, Александр Доброчаев.

записи ритма R_1 равно m, а для R_2 равно n. Прежде всего, проведем процедуру *маситабирования* исходных ритмов, то есть приведем их к одному и тому же количеству разрядов. Найдем число p=н.о.к.(m,n), то есть наименьшее общее кратное чисел m и n. Если теперь мы растянем запись ритма R_1 в p/m раз, а запись ритма R_2 в p/n раз, то количество разрядов в записи обоих ритмов будет одним и тем же, а именно p. Выписывая исходные ритмы один над другим, осуществим их совмещение по каждому разряду в соответствии со следующими простыми правилами: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=1. Нетрудно заметить, что эти равенства задают булево сложение.

Приведем пример. Допустим, нужно совместить ритм *A*=|101| с ритмом *B*=|1011|. Количество разрядов в первом ритме равно трем, во втором 4. Наименьшее общее кратное чисел 3 и 4 равно 12. Следовательно, первый ритм нужно растянуть в 4 раза, а второй – в три. Запись ритма *A* преобразится в |100000001000|. Запись ритма *B* преобразится в |100000100100|. Теперь запишем их одну над другой в виде таблицы 2x12:

1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

Теперь, производя совмещение по каждому разряду в этих двух записях, получим новый ритм *C*=*A*+*B*=|100000101100|=|6,2,1,3|. Этот ритм совмещает свойства двух исходных ритмов, так как они слышатся в нем одновременно. Несложно установить, что операция совмещения, определенная на множестве всевозможных ритмов, обладает свойством ассоциативности и коммутативности. Кроме того, имеется нейтральный элемент – простой вырожденный ритм |1|, но не существует обратных элементов (кроме как для самого ритма |1|). Следовательно, множество всевозможных однопараметрических ритмов образует бесконечную коммутативную полугруппу по совмещению. Очевидно, что пустой ритм невозможно масштабировать с непустым, поэтому совмещение непустого ритма с пустым не имеет смысла.

Совмещение ритмов во многом напоминает операцию объединения упорядоченных множеств. При этом каждому ритму из семейства ритмов с фиксированным числом разрядов мы сопоставляем множество натуральных чисел, соответствующих тем разрядам, на которые приходится сигнал, иными словами, будем рассматривать ритмы в координатном представлении. Очевидно, операции совмещения ритмов из такого семейства в точности соответствует объединение соответствующих множеств.

На множестве однопараметрических ритмов можно задать и настоящую группу по совмещению, если ввести следующие правила поразрядного сложения: 0+1=1+0=1, 1+1=0. По сути, эти правила задают сложение по модулю 2. Чтобы первый разряд не обращался в ноль, условимся применять поразрядное сложение, начиная со второго разряда. Нейтральный элемент – простой вырожденный ритм |1|. Полученная группа представляет некоторый математический интерес, но в музыкальном отношении она малосодержательна, поскольку может сильно искажать исходные ритмы.

Теперь зададим операцию совмещения для двухпараметрических ритмов, то есть для ритмов с низким и высоким сигналом. Правила для поразрядного совмещения сигналов запишем в виде таблицы Кэли:

+	0	1	$\underline{1}$
0	0	1	$\underline{1}$
1	1	1	0
$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Эту таблицу можно описать следующим образом: 0 – нейтральный элемент, совмещение одинаковых сигналов дает сигнал того же типа, совмещение противоположных сигналов (низкого и высокого) дает нейтральный элемент 0. Разумеется, мы могли бы построить таблицу и другими способами, но вышеприведенные правила поразрядного совмещения приводят к наиболее содержательной алгебре, имеющей, кроме того, глубокий музыкальный смысл.

Из-за того что противоположные сигналы при совмещении дают ноль, или паузу, может случиться, что первый сигнал суммируемых путем совмещения ритмов тоже будет нулем. Чтобы этого не допустить, разобьем множество всевозможных двухпараметрических ритмов на подмножество всех ритмов, которые начинаются с низкого сигнала (подмножество $\underline{R}$), и подмножество всех ритмов, которые начинаются с высокого сигнала (подмножество R). Условимся применять операцию совмещения только к ритмам из одного и того же подмножества и никогда – к ритмам из разных множеств. Несложно убедиться, что каждое из множеств $\underline{R}$ и R представляет собой полугруппу по совмещению с нейтральными элементами, соответственно, |$\underline{1}$| и |1|.

Например, если сложить путем совмещения два арабских ритма – *Мунoджот* $|\underline{4},2,2,\underline{4},1,1,1,1|$ и Максум $|\underline{1},2,1,\underline{2},2|$ – то после приведения записи ритмов в позиционную нотацию и операции масштабирования получим: $|\underline{1}0001010\underline{1}0001111|+|\underline{1}0100010\underline{1}0001000|=|\underline{1}0101010\underline{1}0001111|$, или, в геометрической записи, $|\underline{2},2,2,2,\underline{4},1,1,1,1|$.

Для двухпараметрических ритмов также можно сконструировать настоящую группу по совмещению. Этого можно добиться, задав правила поразрядного сложения сигналов так, чтобы они соответствовали правилам сложения по модулю 3. Соответствующая таблица Кэли будет выглядеть следующим образом:

+	0	1	$\underline{1}$
0	0	1	$\underline{1}$
1	1	$\underline{1}$	0
$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	1

В ней роль числа 2 выполняет $\underline{1}$.

Например, если сложить путем наложения *Мунoджот* $|\underline{1}0001010\underline{1}0001111|$ и *Максум* $|\underline{1}0100010\underline{1}0001000|$ по этим правилам совмещения, то получится ритм $|\underline{1}01010\underline{1}01000\underline{1}111|$, или, в геометрической записи, $|\underline{2},2,2,\underline{2},4,\underline{1},1,1,1|$.

Как и в случае соответствующих полугрупп, следует рассматривать группу по совмещению ритмов, начинающуюся с низкого сигнала, отдельно от группы, начинающуюся с высокого сигнала, применяя поразрядное сложение сигналов, начиная со второго разряда.

2.2.1.2 Конкатенация

Рассмотрим теперь второй вариант сложения ритмов, а именно операцию *конкатенации* (от латинского слова “catena” – цепь), имеющую большое значение в ритмике, и, вообще, в музыке. Она состоит в простом присоединении одного ритма к другому. Итак, если ритм *C* получен путем конкатенации ритмов *A* и *B*, то мы добавляем запись ритма *B* справа от записи ритма *A* и пишем: C=A&*B*. Очевидно, что конкатенация не коммутативна. Акцент первого *R* сигнала в ритме *B* в результате конкатенации утрачивается (мы продолжаем рассматривать ритмы только с одним акцентированным сигналом - первым). Например, |4,2,2|&|4,1,1,1,1|=|4,2,2,4,1,1,1,1|. Исследуем свойство этой операции. Во-первых, заметим, что, в отличие от рассмотренных выше операций наложения и умножения, конкретная последовательность чисел в геометрической записи конкатенируемых ритмов имеет значение – мы теперь не можем умножать на разные коэффициенты конкатенируемые ритмы, не изменяя результата операции. Например, |2,1,1|&|4,1,1,1,1|=|2,1,1,4,1,1,1,1|=R_1, а |4,2,2|&|4,1,1,1,1|=|4,2,2,4,1,1,1,1|=R_2. Разумеется, R_1 и R_2 – совершенно разные ритмы, хотя ритм |2,1,1| эквивалентен ритму |4,2,2|. Очевидно, что операция конкатенации ассоциативна, то есть $(A\&B)\&C=A\&(B\&C)$. Очевидно также, что для множества всевозможных ритмов с заданной на нем операцией конкатенации пустой ритм |θ| будет нейтральным элементом, так как A&|θ|=|θ|&A=A. Следовательно, операция конкатенации порождает так называемую *свободную полугруппу* на этом множестве. *Алфавитом* для этой полугруппы, является, очевидно, множество всех натуральных чисел и перечеркнутый ноль.

Мы рассмотрели операцию конкатенации для ритмов с одним типом сигнала. Понятно, что совершенно аналогично она применяется для ритмов с двумя и более типами сигнала.

Если мы осуществляем конкатенацию n равных ритмов, иными словами, получаем ритм R путем n-кратного повторения одного и того же ритма A, то имеет смысл ввести соответствующую разновидность умножения ритма на натуральное число, отличающуюся от рассмотренного выше растяжения (приводящего к эквивалентному ритму). Назовем такую операцию n-кратным повторением ритма A и будем обозначать ее знаком “x” (не путать с умножением, которое мы рассмотрим ниже): $R=A\text{x}n=|A\&A\&\ldots A|$, где операция конкатенации повторяется n-1 раз.

2.2.2 Умножение ритмов

Рассмотрим сначала эту операцию для однопараметрических ритмов. Умножить ритм A на ритм B – это значит исполнить ритм B в ритме A. При этом вместо сигналов ритма A в геометрической записи мы подставляем ритм B, который будем растягивать в соответствии с длительностями сигналов ритма A. Эти длительности теперь будут представлять собой коэффициенты пропорциональности для ритма B. Например, умножая ритм A=|2,1,1| на ритм B=|2,1|, получим ритм C=AxB={|2,1|x2,|2,1|x1,|2,1|x1}=|4,2,2,1,2,1|.

Операция умножения обладает свойством ассоциативности (это неочевидно, хотя легко доказуемо), но не обладает свойством коммутативности. Нейтральный элемент здесь – простой вырожденный ритм |1|, обратных элементов не существует (кроме как для ритма |1|). Введем также в качестве аксиомы правило, что произведение любого ритма на пустой равно пустому ритму, то есть R·|θ|=|θ|. Таким образом, операция умножения задает на множестве всевозможных однопараметрических ритмов некоммутативную полугруппу.

Очевидно, что растяжение ритмов, которое мы использовали как вспомогательную операцию, теперь можно строго определить как умножение на вырожденный ритм |k|, где k – натуральное число. Ясно, что такое умножение коммутативно: R·|k|=|k|·R.

Будем называть *возведением в степень* n (n – целое неотрицательное число) ритма R и обозначать как R^n произведение n сомножителей, каждый из которых равен R, то есть R^n=R·R·…R. По определению R^0=|1|, то есть ритм в нулевой степени есть вырожденный ритм.

Очевидно, что существуют *простые* ритмы, которые невозможно разложить на произведение ритмов, каждый из которых отличается от вырожденного. Таков, например, ритм |2,1,1|. Ритмы, допускающие разложение на множители, каждый из которых не является простым вырожденным ритмом, будем называть *составными*. Сам простой вырожденный ритм, по аналогии с единицей в теории чисел, удобно считать ни простым, ни составным.

Применяя операции умножения и совмещения в различных комбинациях, мы можем получать новые разнообразные ритмы, причем они будут восприниматься не как случайные нагромождения сигналов, а именно как комбинации исходных ритмов. Например, (|2,1,1|+|2,1|)x|2,1,1|=|6,2,1,3|x|2,1,1|=|12,6,6,4,2,2,2,1,1,6,3,3|.

Довольно легко доказывается, что введенные нами на множестве всевозможных однопараметрических ритмов операции совмещения и умножения обладают свойством частичной дистрибутивности, а именно для любых ритмов A, B и C будет справедливо равенство A· (B+C)=(A·B)+(A·C). Назовем такую дистрибутивность *левой* (мы умножаем на ритм C слева). Равенство же (A+B)·C=(A·C)+(B·C) в общем случае не выполняется.

Теперь построим полугруппу по умножению двухпараметрических ритмов. Здесь также целесообразно рассматривать по отдельности множества $\underline{R}$ и R. Начнем с множества $\underline{R}$. Полугруппа по умножению для $\underline{R}$ аналогична таковой для множества однопараметрических ритмов, но теперь при умножении ритма A на ритм B будем учитывать типы сигналов. Эти правила удобно представить в виде таблицы:

·	$\underline{b}$	b
$\underline{a}$	$\underline{ab}$	ab
b	ab	$\underline{ab}$

В этой таблице a и b – длительности сигналов перемножаемых ритмов, соответственно, A и B. Если проводить аналогию с целыми числами, то низкие сигналы можно сравнить с положительными числами, а высокие – с отрицательными.

Например, если мы умножаем ритм $A=|\underline{2},1,1|$ на ритм $B=|\underline{2},1|$, то получим ритм $C=\{|\underline{2},1,1|\cdot\underline{2},\ |\underline{2}11|\cdot 1\}=|\underline{4},2,2,2,\underline{1},\underline{1}|$. Несложно убедиться, что как и в случае однопараметрических ритмов, полученное множество будет некоммутативной полугруппой с нейтральным элементом, или единицей $|\underline{1}|$ – простым вырожденным ритмом, состоящим только из низких сигналов.

Несложно доказать, что для множества $\underline{R}$ с определенными только что совмещением и умножением, также как и в случае однопараметрических ритмов, будет выполняться закон левой дистрибутивности, то есть для любых ритмов A, B и C справедливо равенство $A\cdot (B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$.

Полугруппа R строится аналогично. Правила умножения сигналов для нее выглядит следующим образом:

·	$\underline{b}$	b
$\underline{a}$	ab	$\underline{ab}$
a	$\underline{ab}$	ab

Здесь, наоборот, высокие сигналы аналогичны положительным целым числам, а низкие сигналы – отрицательным. Нейтральным элементом является ритм $|1|$. Правая дистрибутивность выполняется.

Назовем множество, образующее коммутативную полугруппу по совмещению и полугруппу по умножению, которые связаны законом частичной дистрибутивности, *неполным полукольцом*. Интересное свойство неполного полукольца – как для одно-, так и для двухпараметрических ритмов - состоит в том, что полугруппы по совмещению и умножению имеют один и тот же нейтральный элемент. Для однопараметрических ритмов и двухпараметрических ритмов, начинающихся с высокого сигнала, таким элементом является ритм |1|; для двухпараметрических ритмов это |$\underline{1}$|.

Интересно, что операции совмещения и умножения ритмов связаны друг с другом аналогично тому, как операции обычного сложения и умножения связаны в кольце целых чисел. Действительно, естественно считать, что умножение ритма A на натуральное число n равно умножению ритма A на ритм $|n|$, то есть $A \cdot n = A \cdot |n|$, $n \cdot A = |n| \cdot A$. Но ритм $|n|$ эквивалентен ритму|1|, то есть простому вырожденному ритму, так как пропорциональные ритмы мы считаем эквивалентными. Следовательно, $(A \cdot n) \sim A \sim (n \cdot A)$. С другой стороны, если мы сложим путем совмещения n раз ритм A, то, в соответствии с нашими правилами совмещения, получим тот же ритм A.

На основе умножения и совмещения можно создать интересную коммутативную бинарную операцию, которую мы назовем *симметрическим умножением* и будем обозначать значком ∇. Она задается следующим образом:

$R_1 \nabla R_2 = (R_1 \cdot R_2) + (R_2 \cdot R_1)$. Например, (2,1,1) ∇ (2,1)={(2,1,1) · (2,1)}+{(2,1) · (2,1,1)}=(4,2,2,1,1,1,1).

В результирующем ритме $R_1 \nabla R_2$ ритм R_1 звучит в ритме R_2 и одновременно R_2 звучит в ритме R_1.

На множестве всевозможных ритмов - как однопараметрических, так и двухпараметрических - можно строить алгебраические структуры, напоминающие настоящие кольца. Для этого в качестве аддитивных групп следует рассматривать группы по совмещению (мы их рассматривали выше). Назовем полученные структуры *неполными кольцами*. От настоящих колец их отличает лишь частичная дистрибутивность.

Можно также сконструировать неполное кольцо двухпараметрических ритмов, где высота сигнала может принимать любое значение от 0 до N (где N – некоторое фиксированное натуральное число, большее двух), причем нулевой высоте сигнала соответствует пауза. Соответствующие операции совмещения и умножения в таком неполном кольце производятся как обычное сложение и умножение по модулю N+1 относительно параметра высоты. Очевидно, что в рассмотренных нами неполных кольцах однопараметрических и двухпараметрических ритмов операции поразрядного совмещения производились как сложение и умножение по модулю, соответственно, 2 и 3. Для N=6 можно построить *пентатоническую* алгебру, где в качестве элементов выступают *мотивы* – мелодические фрагменты, составленные из нот пентатонической гаммы (например, из до, ре, фа, соль, ля). Пентатоническая система очень удобна для алгебраических манипуляций, потому что в ней не так явно выражены тяготения, как в более сложных тональных системах (в частности, в мажоре и миноре).

Теперь займемся связью умножения с конкатенацией. Очевидно, что умножение можно выразить через конкатенацию следующим образом: $|a_1, a_2, .. a_n| \cdot R = |(a_1 \cdot R)\&(a_2 \cdot R)\&\ldots(a_n \cdot R)|$.

Несложно также доказать, что для любых ритмов A, B и C – как одно-, так и двухпараметрических - справедливо следующее равенство: $(A\&B)\cdot C=(A\cdot C)\&(B\cdot C)$. Равенство же $A\cdot (B\&C)=(A\cdot B)\&(A\cdot C)$ в общем случае не соблюдается. Значит, эти операции связаны законом дистрибутивности лишь частично, а именно законом *правой* дистрибутивности (умножаем на ритм C справа).

Таким образом, мы получили интересную систему из трех основных бинарных операций над ритмами: умножением и двумя разновидностям сложения, которые связаны с умножением, соответственно, законами правой и левой дистрибутивности.