Антонио Грамши

АЛГЕБРА РИТМОВ И ВОСПРИЯТИЕ ВРЕМЕНИ

“ Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi” (музыка – это тайное арифметическое упражнение души, которая вычисляет, сама того не зная). Прошло почти 300 лет с тех пор как Лейбниц, один из основоположников математического анализа и современник Баха, написал эти великие слова в письме Гольдбаху, однако они за это время не потеряли очарования и актуальности. Напротив, в результате многочисленных исследований была выявлена способность человеческого мозга неосознанно подмечать математические закономерности в окружающем нас мире. Зачастую эта способность работает и в обратном направлении, то есть выявляется в процессе творчества. Так, многие композиторы, поэты, художники и даже писатели неосознанно использовали в своих произведениях тонкие математические принципы, например, принцип золотого сечения. Все это конечно очень интересно, но мы пока не будем касаться этой сложной темы.

По-видимому, самый математический объект в музыке – это ритм, ее “скелет”. Мы займемся математическим анализом музыкальных ритмов в связи с более общей проблемой восприятия времени и предложим некоторые конструкции для генерирования и преобразования ритмов, которые, возможно, заинтересуют композиторов и математиков. Надеюсь, что и музыканты-исполнители найдут для себя в этом материале много интересного.

Дадим, в первую очередь, строгие определения тем понятиям, с которыми нам нужно будет иметь дело. Возможно, эти определения окажутся не самыми удачными и не будут совпадать с общепринятыми, но, по крайней мере, у читателя в процессе чтения не возникнет недоразумений.

Ритмическим рисунком будем называть любую, конечную или потенциально бесконечную, последовательность из 0 и 1. Музыкальный смысл этого определения состоит в том, что каждый член последовательности соответствует единице (ячейке) дискретного времени, причем 0 соответствует паузе, 1 соответствует извлечению звука (сигналу). Это так называемое *позиционное* представление ритмического рисунка. При этом запись ритмического рисунка всегда будет начинаться с единицы и будет заключена в квадратные скобки, например: [1000101010001111]. Первому сигналу в рисунке придается особое значение, поскольку он определяет начало рисунка. Будем считать его *акцентированным*. В позиционном представлении сигнал рассматривается как “точечное” событие, а паузы длятся от одного сигнала к другому. Попутно отметим, что разновидности такой записи ритмических рисунков часто используются в традиционных перкуссионных школах, например, индийской и арабской.

Другой подход, тесно связанный с предыдущим, заключается в том, чтобы ритмический рисунок представлять как начинающуюся с единицы строго возрастающую последовательность натуральных чисел. Музыкальный смысл такого представления состоит в том, что каждому числу в последовательности соответствует момент на дискретной шкале времени, когда производится сигнал. Такое представление ритма будем называть *координатным* (каждому моменту соответствует координата на временной оси). Представим вышеприведенный ритмический рисунок [1000101010001111] в координатном виде, получим [1,5,7,9,13,14,15,16].

И, наконец, третий подход состоит в представлении ритмического рисунка в виде последовательности натуральных чисел, причем каждое число соответствует длине отрезка дискретного времени от одного сигнала (включая момент, когда он производится) до следующего (не включая этот момент). Такое представление будем называть *геометрическим*. Например, вышеприведенный ритмический рисунок [1000101010001111] в геометрическом виде будет выглядеть следующим образом: [4,2,2,4,1,1,1,1]. В геометрическом представлении, в отличие от позиционного, паузу удобно считать “точечным” событием, а сигнал - длящимся от одной паузы к другой. Отметим, что классическая нотная запись является по своей сути геометрической. Возникает закономерный вопрос, почему такая запись названа геометрической, а не, скажем, арифметической. Все дело в том, что мы абстрагируемся от абсолютного времени – нас интересуют только соотношения длин временных отрезков. Кстати, поэтому мы можем умножить каждое число этой записи на любое фиксированное натуральное число, и при этом ритмический рисунок останется прежним. Например, вместо [4,2,2,4,1,1,1,1] мы могли бы написать [8,4,4,8,2,2,2,2] или [16,8,8,16,4,4,4,4] и т. д. Так как мы не привязаны к конкретному темпу, и нас интересуют лишь соотношения временных интервалов между сигналами, ритмический рисунок в геометрическом представлении лучше записывать в виде последовательности чисел, не имеющих общего делителя, хотя это и не принципиально.

В дальнейшем, как увидит читатель, разные виды записи будут отображать также и разные подходы к представлению о восприятии времени. Для практических целей мы будем использовать только позиционную и геометрическую запись. Читатель без труда различит их: в позиционной записи нет запятых, а в геометрической они есть. Координатная запись, неудобная в практических приложениях, понадобится нам только в одном теоретическом рассуждении о восприятии времени.

Бесконечное повторение одного и того же ритмического рисунка порождает собственно *ритм.* Ритмический рисунок, порождающий ритм, будем называть *ритмическим периодом*. Запись ритма будем заключать в круглые скобки. Например, ритмический период [2,1,1] порождает ритм [2,1,1],[2,1,1],[2,1,1]… , или (2,1,1). В разрабатываемой нами теории понятия ритма и бесконечного ритмического рисунка не равнозначны. Например, в ритме (2,1,1) каждый (n+3)-й сигнал (где n=1,2,3..) - акцентированный, а в бесконечном ритмическом рисунке [2,1,1,2,1,1,2,1,1,…] акцентированным является только первый сигнал.

Музыканты обычно используют понятие “ритм” как для обозначения собственно ритма, так и для ритмического периода. Так как ритмический период однозначно задает ритм, то и мы в дальнейшем, кроме особых случаев, будем поступать точно так же. Первому сигналу в ритмическом периоде мы будем придавать особое значение – это всегда будет так называемый *акцентированный* сигнал. Если бы мы не выделяли акцентированных сигналов, то запись ритма, например, (1,2,3), допускала бы циклическую перестановку чисел. В этом случае (1,2,3), (2,3,1) и (3,1,2) являлись бы записью одного и того же ритма. В нашем же случае это разные ритмы. Разными ритмами будут, например, (211) и (211211). Будем различать также разные варианты *вырожденного* ритма: (1), (11), (111),… Ритм (1) будем называть *простым вырожденным.* Акцентированность сигналов будет использоваться нами только при исполнении ритма (путем выделения сигнала тем или иным способом – тембром, громкостью и т. д), но не будет учитываться в математических операциях, производимых над ритмами. Мы не будем также специально рассматривать внутренние акценты, то есть акцентированные сигналы внутри ритма, поскольку при этом начало ритмического периода стало бы неопределенным, а нам нужна определенность для математических операций с ритмами, о которых пойдет дальше речь.

Скорее всего, ритмы воспринимаются нами геометрически: при этом мы, сравниваем между собой временные отрезки между сигналами, а не фиксируем их пассивно на "встроенной в мозг" временной оси. Координатное представление может послужить основой для феноменологической модели первичного восприятия времени. В этом случае координаты соответствуют абстрактной величине, которую я назвал *яркостью* сигнала. В каждый момент времени мы воспринимаем все предыдущие сигналы в виде единого множества. Поскольку все они имеют разную яркость, мы способны упорядочить их на воображаемой временной оси. Первичное ощущение времени возникает в результате суперпозиции и соответствующей "голографической" обработки, по крайней мере, двух сигналов различной яркости. Подобный механизм лежит в основе стереоскопического зрения: здесь тоже происходит суперпозиция с последующей "голографической" обработкой двух различных зрительных образов, получаемых от правого и левого глаза. Еще раз подчеркну, что описанная мною модель является именно феноменологической: мы не знаем, что происходит на самом деле, но абстрактная модель может помочь нам приблизиться к такому пониманию.

Каждый ритмический период, если он имеет достаточную протяженность, может, в свою очередь, состоять из отдельных фрагментов, каждый из которых воспринимается как единое целое. Назовем такие фрагменты *ритмическими модулями* (обычно музыканты выделяют начало каждого модуля небольшим акцентом). Это понятие субъективное, поскольку, в зависимости от музыкального опыта, протяженность модуля может оказываться разной для разных категорий слушателей. Для наших целей мы ограничимся изучением модулей, имеющих одинаковую протяженность. Условимся записывать модули в виде столбика и читать их сверху вниз. Например, разделяя ритм (1000101010001111) на 8 модулей, состоящих из двух сигналов, получим следующую запись, которую можно интерпретировать как матрицу S_2 (2-число строк в матрице):

1	O	1	1	1	O	1	1
O	O	O	O	O	O	1	1

Если мы увеличим количество сигналов в модуле до четырех, то получим следующую матрицу S_4:

1	1	1	1
O	O	O	1
O	1	O	1
O	O	O	1

Увеличив количество сигналов в модуле до восьми, получаем следующую матрицу S_8:

1	1
O	O
O	O
O	O
1	1
O	1
1	1
O	1

И, наконец, увеличив модуль до 16-ти сигналов, получим предельный случай – матрицу S_{16}:

1
O
O
O
1
O
1
O
1
O
O
O
1
1
1
1

Очевидно, если мы транспонируем эту матрицу, то получим исходную запись ритма, записанную в виде матрицы 1х16, S_1:

1	O	O	O	1	O	1	O	1	O	O	O	1	1	1	1

Теперь сделаем следующее преобразование для строк всех получившихся матриц: оставляя первый знак в строке, и, двигаясь слева направо, будем выписывать только новые знаки, пропуская повторяющиеся. Например, матрица S_4 превратится в следующую:

1			
O			1
O	1	O	1
O			1

Поскольку в каждой строке происходит правильное чередование цифр, мы можем, оставляя первую цифру в строке, заменить остальные на нейтральный знак, например на крестик, “х”. Матрица примет следующий вид:

1			
O			X
O	X	X	X
O			X

Теперь преобразуем первый столбец, рассматривая его в направлении сверху вниз, точно так же, как мы только что преобразовывали строки. Получим следующую матрицу:

1			
X			X
	X	X	X
			X

Поскольку и так понятно, что в ячейке матрицы в левом верхнем углу будет находиться 1 (любой ритм начинается с сигнала), мы можем и в ней поместить крестик. В результате получим следующую матрицу:

X			
X			X
	X	X	X
			X

Назовем такую матрицу *характеристической матрицей первого порядка* для данного разбиения на модули и будем обозначать ее как S'.

Очевидно, что по ней несложно восстановить исходную матрицу, проделывая вышеописанные преобразования в обратном порядке.

Проделаем подобное преобразование над всеми остальными матрицами. Выпишем в порядке возрастания числа строк все получившиеся матрицы, включая только что разобранный случай матрицы 4x4.

Матрица S_1':

X	X			X	X	X	X	X	X			X			

Матрица S_2':

X	X	X			X	X	
X						X	

Матрица S_4':

X			
X			X
	X	X	X
			X

Матрица S_8':

X	
X	
X	
X	X
X	
X	X

Матрица S'_{16}:

X
X
X
X
X
X
X
X
X

Теперь подсчитаем для каждой характеристической матрицы число знаков в ней, которое будем называть ее *мерой сложности* и обозначать как *L*. Для матрицы S_1' *L*=9, для матрицы S_2' *L*=7, для матрицы S_4' *L*=7, для матрицы S_8' *L*=8 и, наконец, для матрицы S_{16}' *L*=9. Итак, мера сложности минимальна для матрицы S_2' и S_4'. При этом в матрице S_4' сумма числа строк и столбцов, которая равна 4+4=8, меньше аналогичной суммы для матрицы S_2', где она равна 2+8=10. Иными словами, матрица S_4' еще более компактна, чем матрица S_2'. Интересно, что и соответствующее матрице S_4 разбиение на модули оказывается самым естественным, причем неясно, что в данном случае важнее для удобства восприятия ритма – квадратная форма матрицы (при этом получается небольшое число сравнительно коротких модулей) или ее минимальная мера сложности. Назовем такого рода матрицы *оптимальными*. Разумеется, основываясь только на этом единичном примере, нельзя утверждать, что человеческий мозг стремится воспринимать ритмы в наиболее компактном виде, пытаясь задействовать как можно меньше “информационных ячеек” (подобно архивированию файлов в компьютерах). Здесь необходимо провести анализ восприятия большого числа разнообразных, сравнительно коротких ритмов у разных категорий слушателей.

Оказывается, характеристическую матрицу с помощью ряда преобразований можно еще больше упростить. Рассмотрим снова матрицу S_4':

X			
X			X
	X	X	X
			X

Преобразуем ее следующим образом: поменяем крестики на единицы, а в оставшиеся ячейки поместим нули. Получим матрицу

1	0	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Теперь произведем над ней те же преобразования, которые мы производили над матрицей S_4, чтобы получить матрицу S_4'. Получим матрицу

X	X		
	X		X
X	X		
			X

Назовем ее *характеристической матрицей второго порядка* от матрицы S_4 и будем обозначать ее как S_4''. Мера ее сложности тоже равна 7. Совершенно аналогично строим матрицу S_4''':

X		X	
X	X	X	X
X		X	
X			X

Ее мера сложности будет равна 10.

Матрицу S_4''', в свою очередь, можно преобразовать в матрицу $S_4^{(\mathrm{IV})}$ и т. д. Мы не будем выписывать все получающиеся при этом характеристические матрицы, так как читатель может без труда сделать это сам. Характеристическая матрица девятого порядка, $S_4^{(\mathrm{IX})}$= S_4'. Таким образом, орбита преобразований для матрицы S_4' состоит из восьми характеристических матриц. Для нас важно, что мера сложности матрицы $S_4^{(\mathrm{V})}$ равна 6, то есть меньше меры сложности матрицы S_4'.

Приведем еще один пример, показывающий, насколько эффективно может происходить “архивирование” ритмов при последовательном построении характеристических матриц.

Рассмотрим следующий ритм: (1100001110000110). Разобьем его на модули по матрице S_4 (она, правда, не будет оптимальной для данного ритма):

1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	0

Соответствующая характеристическая матрица первого порядка, S_4' будет иметь следующий вид:

X	X	X	X
	X		X
X	X	X	X
	X	X	

Мера ее сложности будет равна 12.

Теперь построим характеристическую матрицу второго порядка S_4'':

X			
X	X	X	X
X			
X	X		X

Эта матрица имеет уже меру сложности, равную 9.

И, наконец, построим характеристическую матрицу третьего порядка S_4''':

X	X		
	X		
		X	X

Эта матрица имеет меру сложности, равную 5. Таким образом, троекратное последовательное построение характеристических матриц привело к сжатию (но не потере) информации об исходной матрице почти в три раза!

Пусть даны два достаточно коротких ритмических рисунка *A* и *B*, имеющих одинаковое количество основных долей (или, попросту, одинаковую временную протяженность). Обозначим соответствующие им оптимальные матрицы как $S^{\mathrm{opt}}(A)$ и $S^{\mathrm{opt}}(B)$. Меры сложности соответствующих им характеристических матриц обозначим как $L(A)$ и $L(B)$. Сыграем подряд эти рисунки. Оказывается, что, если $L(A) > L(B)$, то рисунок *B* будет казаться несколько замедленным по сравнению с *A*, а если $L(A) < L(B)$, то *B*, наоборот, будет казаться ускоренным по сравнению с *A*. Эта разница в ощущении скорости будет тем сильнее, чем больше различаются характеристические числа рисунков *A* и *B*. Выражаясь более образно, можно сказать, что если в данном временном отрезке сосредоточено больше информации, то сознание стремится как бы расширить его, чтобы воспринять лучше содержащуюся в нем информацию. Приведем простейший пример. Сыграем ритм *R*=(1010101011111111). Практически любой слушатель скажет, что он воспринимает его как состоящий из чередующихся фрагментов - ритмических рисунков *M*=[10101010] и *P*=[11111111]. Каждый из этих рисунков является фрагментом простого вырожденного ритма, (1). Но поскольку в ритме *R* соединяются фрагменты простого вырожденного ритма, исполняемого в двух разных темпах, то рисунок *M* будет восприниматься уже не как фрагмент ритма (1), а как фрагмент более сложного ритма (10). Поэтому при переходе от фрагмента *M* к фрагменту *P* музыкально неподготовленный человек будет слышать небольшое замедление, поскольку фрагмент *P*, несмотря на то, что состоит из большего количества сигналов, имеет оптимальную матрицу меньшей меры сложности. Это обстоятельство хорошо известно учителям музыки: начинающие ученики, исполняя после медленных (но сложно организованных в ритмическом отношении) фрагментов простые пассажи, не представляющие для них технической сложности (например, гаммообразные), часто играют их в “скомканном” виде, то есть быстрее, чем нужно. С приобретением музыкального опыта субъективное течение времени постепенно приближается к объективному.

Мы разобрали простейшие случаи деления ритмических рисунков на модули. На самом деле, модули могут иметь разную длину. Хотя именно такие разбиения чаще всего встречаются в профессиональной музыке, мы не будем их анализировать ввиду сложности подобного анализа.

А теперь перейдем к описанию некоторых алгоритмов генерирования новых ритмов. Я давно пытался на основе ритмов создать структуры, аналогичные алгебраическим объектам – группам и кольцам. Основная проблема, с которой мне пришлось столкнуться – это сохранение музыкального смысла в полученных таким образом структурах. Мне хотелось, чтобы слушатель не только осознавал логически, но и “слышал” те преобразования, которые происходят с исходными ритмами. Насколько мне удалось достичь поставленной задачи, судить читателю.

Прежде всего, рассмотрим девять унарных операций над ритмами, из которых первые три широко используются в музыкальной композиции. Первая из них – *ракоход*, который сводится к исполнению исходного ритма в обратном порядке. Например, если мы построим ракоход от ритма (4,2,2,4,1,1,1,1), то получим ритм (1,1,1,1,4,2,2,4). Очевидно, что ракоход можно представить себе как зеркальное отражение записи ритма относительно вертикальной оси, проходящей через середину ритма. Если ритм при ракоходе меняется, как в приведенном мною примере, то он называется *полярным*, в противном случае он называется *неполярным*. Например, неполярным является ритм (4,2,2,4). Очевидно, что все неполярные ритмы, и только они, имеют симметричную геометрическую запись. Второй унарной операцией является *обращение*. Прежде чем ознакомиться с этой операцией, введем понятие *двухпараметрических* ритмов. В таких ритмах существуют два противопоставляемых друг другу по *высоте* типа сигналов – *низкий* и *высокий* (например, низкий и высокий звук на барабане). Первый тип сигнала будем обозначать подчеркиванием снизу, второй тип будем обозначать так же, как мы это делали для обычных сигналов однопараметрических ритмов. Операция обращения состоит в замене одного типа сигналов на другой, ему противоположный. Например, ритм ($\underline{4}22\underline{4}1111$) при обращении преобразуется в следующий: ($4\underline{22}4\underline{1111}$).

Комбинацию (последовательное выполнение) ракохода и обращения называют *инверсией*. Несложно убедиться, что ракоход, обращение и инверсия образуют абелевую (коммутативную) группу преобразований над множеством R всевозможных ритмов, которую будем обозначать как Q_R. Групповая (бинарная) операция состоит в последовательном выполнении (суперпозиции) двух преобразований (унарных операций) над данным ритмом. Роль единицы играет тождественное преобразование, при котором ритм остается неизменным. Таблица Кэли для группы Q_R будет следующей:

	e	*c*	*r*	*i*
e	*e*	*c*	*r*	*i*
c	*c*	*e*	*i*	*r*
r	*r*	*i*	*e*	*c*
i	*i*	*r*	*c*	*e*

Здесь *e* - тождественное преобразование, *c* – ракоход (от лат. cancer – рак), *r* – обращение (от лат. rivoltatio - опрокидывание), *i* – инверсия (от лат. inversio - перестановка). Очевидно, что группа Q_R изоморфна диэдрической группе порядка 4, D_2. В этой группе, в отличие от циклической группы порядка 4, все элементы, отличные от единичного, *e*, имеют порядок, равный 2.

Следующая “нелинейная” операция, называемая *дополнением* ритма, сводится к преобразованию долгих сигналов в короткие, а коротких – в длинные. При этом в геометрической записи ритма R=(a,b,...c) ищется максимально долгий сигнал длительности m. Дополнением ритма R будет следующий ритм $s(R)$= (m+1-a,m+1-b,…m+1-c). Например, дополнением ритма *R*=(4,2,2,4,1,1,1,1) станет ритм *s*(*R*)=(4+1-4,4+1-2,4+1-2,4+1-4,4+1-1,4+1-1,4+1-1,4+1-1)=(1,3,3,1,4,4,4,4). Очевидно, что эта операция вместе с предыдущими операциями ракохода, обращения и инверсии образует абелевую группу G_R над множеством всех ритмов, но уже порядка 8. Выпишем ее таблицу Кэли:

	e	*c*	*r*	*i*	*s*	*cs*	*rs*	*is*
e	*e*	*c*	*r*	*i*	*s*	*cs*	*rs*	*is*
c	*c*	*e*	*i*	*r*	*cs*	*s*	*is*	*rs*
r	*r*	*i*	*e*	*c*	*rs*	*is*	*s*	*cs*
i	*i*	*r*	*c*	*e*	*is*	*rs*	*cs*	*s*
s	*s*	*cs*	*rs*	*is*	*e*	*c*	*r*	*i*
cs	*cs*	*s*	*is*	*rs*	*c*	*e*	*i*	*r*
rs	*rs*	*is*	*s*	*cs*	*r*	*I*	*e*	*c*
Is	*is*	*rs*	*cs*	*s*	*i*	*r*	*c*	*e*

Из таблицы видно, что группа Q_R является нормальным делителем группы G_R. Соответствующая фактор-группа *G/Q* изоморфна циклической группе порядка 2. Очевидно также, что группа G_R является диэдрической группой D_3 порядка 8. Несложно разработать и другие унарные операции, которые вместе с вышеописанными операциями будут образовывать диэдрические группы более высоких порядков (в общем случае порядок группы D_n равен 2^n).

Операция *сдвига* состоит в циклической перестановке чисел в геометрической записи ритма: при этом первое число ставится в конец записи. Будем обозначать эту операцию буквой *t* (от лат. translatio – перенос). Например, *t*(2,1,1)=(1,1,2). Музыкальный смысл этой операции состоит в том, что акцент смещается на второй сигнал исходного ритма. Очевидно, что каждый ритм порождает циклическую группу, порядок которой равен числу сигналов в нем. Например, ритм (2,1,1) порождает группу, состоящую из трех элементов: t^0=*e* (тождественное преобразование), t^1=*t* (собственно сдвиг) и t^2=*t*x*t* (повторный сдвиг). Итак, t^0=(2,1,1), t^1=(1,1,2), t^2=(1,2,1).

Теперь перейдем к двум противоположным друг другу “нелинейным” операциям - *смягчению* и *заострению* ритмов. Смягчением называется прибавление единицы к каждому числу в геометрической записи ритма. Приведем пример. Возьмем неоднократно использованный нами ритм

(4,2,2,4,1,1,1,1). Теперь, прибавляя единицу к каждому числу записи этого ритма, получим ритм (5,3,3,5,2,2,2,2). Этот ритм звучит аналогично исходному, но как бы в “смягченном” варианте, поскольку теперь сигналы распределены несколько более равномерно. Если мы применим операцию к этому новому ритму, получим еще более “смягченный” ритм. Продолжая применять операцию и дальше, очевидно, в пределе мы получим ритм, состоящий из равномерной последовательности сигналов. Мы можем смягчать ритм как угодно мало, предварительно умножая каждое число в его записи на произвольное натуральное число (очевидно, что при этом ритм не меняется). Как несложно убедиться, с помощью операции смягчения можно превратить пунктирный ритм (3,1) в пунктирно-триольный (2,1), который широко используется в блюзе и джазе.

Операция заострения ритмов, противоположная смягчению, состоит в вычитании единицы из каждого числа в геометрической записи ритма; при этом минимальное число в этой записи должно превосходить единицу. Рассмотрим снова ритм (4,2,2,4,1,1,1,1). Поскольку запись ритма содержит единицы, умножим предварительно каждое число, например, на 2. Получим “растянутую” запись того же самого ритма: (8,4,4,8,2,2,2,2). Теперь мы можем применить операцию заострения, вычитая из каждого числа по единице. Получим ритм (7,3,3,7,1,1,1,1). Этот ритм тоже будет восприниматься как подобный исходному, но, по сравнению с ним, будет иметь несколько более “острый” характер, так как здесь сигналы будут распределены менее равномерно. Если мы будем применять операцию заострения и дальше, то в пределе также получим равномерный ритм, но характер стремления к пределу здесь будет совершенно иным. Как и в случае операции смягчения, мы можем заострять ритм как угодно мало, предварительно умножая каждое число в его записи на произвольное натуральное число.

Теперь рассмотрим бинарные операции над ритмами. Вначале рассмотрим *сложение* ритмов, которое удобно рассматривать, используя позиционную запись. Пусть даны два ритма R_1 и R_2 Допустим, что число разрядов в позиционной записи ритма R_1 равно *m*, а для R_2 равно *n*. Прежде всего, проведем процедуру масштабирования исходных ритмов, то есть приведем их к одному и тому же количеству разрядов (эту процедуру специально для операции сложения ритмов разработал мой коллега Александр Доброчаев). Найдем число *p*=н.о.к.(*m*,*n*), то есть наименьшее общее кратное чисел *m* и *n*.

Если теперь мы растянем запись ритма R_1 в p/m раз, а запись ритма R_2 в p/n раз, то количество разрядов в записи обоих ритмов будет одним и тем же, а именно p. Выписывая исходные ритмы один над другим, осуществим их сложение по каждому разряду в соответствии со следующими простыми правилами: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=1. Нетрудно заметить, что эти равенства задают булево сложение. Приведем пример. Допустим, нужно сложить ритм *A*=(101) с ритмом *B*=(1011). Количество разрядов в первом ритме равно трем, во втором 4. Наименьшее общее кратное чисел 3 и 4 равно 12. Следовательно, первый ритм нужно растянуть в 4 раза, а второй – в три. Запись ритма А преобразится в (100000001000). Запись ритма *B* преобразится в (100000100100). Теперь запишем их одну над другой в виде таблицы 2x12:

1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

Теперь, суммируя по каждому разряду эти две записи, получим новый ритм *C*=*A*+*B*=(100000101100). Этот ритм совмещает свойства двух исходных ритмов, так как они слышатся в нем одновременно. Несложно установить, что операция сложения, определенная на множестве всевозможных ритмов, обладает свойством ассоциативности и коммутативности. Кроме того, имеется нейтральный элемент – пауза (0), но не существует обратных элементов. Следовательно, множество всевозможных ритмов образует бесконечную коммутативную полугруппу по сложению.

Перейдем теперь к операции *умножения* ритмов, которую удобно рассматривать, используя геометрическую запись. Умножить ритм *A* на ритм *B* – это значит исполнить ритм *A* в ритме *B*. При этом вместо сигналов ритма *B* мы подставляем ритмический период *A*, который будем растягивать в соответствии с длительностями сигналов ритма *B*. Эти длительности теперь будут представлять собой коэффициенты пропорциональности для ритма *A*. Например, умножая ритм *A*=(2,1) на ритм *B*=(2,1,1), получим ритм *C*=*A*x*B*={(2,1)x2,(2,1)x1,(2,1)x1}=(4,2,2,1,2,1). Операция умножения, так же, как и сложение, обладает свойством ассоциативности (это неочевидно, хотя легко доказуемо), но не обладает свойством коммутативности. Нейтральный элемент здесь – простой вырожденный ритм (1) и не существует обратных элементов. Таким образом, операция умножения задает на множестве всевозможных ритмов некоммутативную полугруппу. Будем называть *возведением в степень n* (*n* – целое неотрицательное число) ритма *R* и обозначать как R^n произведение *n* сомножителей, каждый из которых равен *R*, то есть *R*x*R*x…*R.* По определению R^0=(1), то есть ритм в нулевой степени есть вырожденный ритм. Очевидно, что существуют *простые* ритмы, которые невозможно разложить на произведение ритмов, каждый из которых отличается от вырожденного. Таков, например, ритм (2,1,1). Ритмы, допускающие разложение на множители, каждый из которых не является простым вырожденным ритмом, будем называть *составными*. Сам простой вырожденный ритм, по аналогии с единицей в теории чисел, удобно считать ни простым, ни составным. Пока мне неизвестно, справедлив ли аналог основной теоремы арифметики и для ритмов, то есть, является ли разложение ритма на сомножители, каждый из которых – степень некоторого простого ритма, единственным (поскольку умножение – некоммутативная операция, то порядок сомножителей имеет значение).

Введенные нами операции сложения и умножения обладают свойством дистрибутивности, то есть для любых ритмов *A*, *B* и *C* будут справедливы тождества *A*x(*B*+*C*)=(*A*x*B*)+(*A*x*C*), а также (*B*+*C*)x*A*=(*B*x*A*)+(*C*x*A*). Строгое доказательство этого свойства довольно громоздко, поэтому я приводить его не буду. Подобного рода структура в алгебре называется *полукольцом*. Применяя операции умножения и сложения в различных комбинациях, мы можем получать новые разнообразные и очень красивые ритмы, в которых отчетливо будут слышаться исходные ритмы. Например, {(2,1,1)+(2,1)}x(2,1,1)=(12,4,2,6,6,2,1,3,6,2,1,3). Очень красиво слушаются *ритмические гномоны*, самоподобные структуры, образованные многократным умножением ритма на самого себя, то есть *возведением* ритма *в степень*. Разумеется, для этого лучше подходят достаточно короткие ритмы.

Попробуем теперь сконструировать настоящее кольцо на множестве всевозможных ритмов. Чтобы оно имело музыкальный смысл, мы должны обратиться к рассмотрению двухпараметрических ритмов. Прежде всего, построим коммутативную группу по сложению. Процедуру масштабирования оставим прежней. Правила поразрядного сложения представим в виде таблицы Кэли:

+	0	1	$\underline{1}$
0	0	1	$\underline{1}$
1	1	$\underline{1}$	0
$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	1

Из таблицы видно, что множество {0,1,$\underline{1}$} с введенной таким образом операцией суммирования является циклической группой порядка 3. Следовательно, и множество всевозможных ритмов, попарное суммирование которых производится поразрядно в соответствии с вышеприведенной таблицей, является группой. Операцией, обратной сложению, будет *вычитание.*

Например, если сложим два арабских ритма – *муноджот* ($\underline{1}$0001010$\underline{1}$0001111) и *максум* ($\underline{1}$0100010$\underline{1}$0001000), то получим ритм (101010$\underline{1}$01000$\underline{1}$111).

Теперь построим полугруппу по умножению. Она будет аналогична таковой для однопараметрических ритмов, но теперь при умножении ритма *A* на коэффициенты пропорциональности ритма *B* мы будем учитывать тип сигналов ритма *B*. Если этот сигнал будет низким, то умножаемые на него сигналы ритма *A* будут сохранять свою высоту, если же сигнал ритма *B* будет высоким, то умножаемые на него сигналы ритма *A* будут менять свою высоту. Например, если мы умножаем ритм *A*=($\underline{2,}$1,1) на ритм *B*=($\underline{2,}$1), то получим ритм *C*={($\underline{2,}$1,1)x$\underline{2,}$ ($\underline{2}$11)x1}=($\underline{4}$,2,2,2,$\underline{1}$,$\underline{1}$). Несложно убедиться, что, как и в однопараметрическом случае, полученное множество будет некоммутативной полугруппой с единицей ($\underline{1}$) – простым вырожденным ритмом, состоящим только из низких сигналов. Несложно доказать, что в полученном множестве всевозможных двухпараметрических ритмов с определенными нами только что сложением и умножением будет выполняться дистрибутивность. Следовательно, оно будет кольцом.

Исследуем некоторые свойства этого кольца. Пусть даны два произвольных ритма, записанных в геометрическом виде: *A*=(a_i) и *B*=(b_j). Вычислим ритм *C*=*A*+*B*=(c_k) и ритм *D*=*A*x*B*=(d_l). Как я писал выше, $\sum c_k$=н.о.к.($\sum a_i$, $\sum b_j$). Несложно показать, что $\sum d_l$=($\sum a_i$)x($\sum b_j$). Из этого следует, что в кольце всевозможных ритмов множество всех ритмов, сумма длительностей сигналов в которых кратна фиксированному числу *p*, образует идеал. Минимальным подкольцом, содержащим фиксированный ритм *R* будет кольцо *K*[*R*] всевозможных полиномов от *R* с целочисленными коэффициентами, то есть множество выражений следующего вида: a_0R^0+a_1R^1+a_2R^2+…a_nR^n=$a_0(1)$+a_1R^1+a_2R^2+…a_nR^n. Подкольцо можно также сконструировать, используя в качестве образующих фиксированные *n* ритмов R_1,R_2, …,R_n, рассматривая кольцо *K*[R_1,R_2, …,R_n] всевозможных полиномов от этих ритмов.

Совмещение нескольких ритмов, то есть их одновременное исполнение (например, на сильно различающихся между собой по тембру музыкальных инструментах) не является *n*-арной операцией, так как не приводит к образованию нового ритма, а образует новый объект – *ритмический массив*. Теперь, помимо ракохода, обращения, инверсии и смягчения-заострения, мы можем применять и другие операции по отношениям к отдельным ритмам из массива. Эти операции, которые не имеют смысла для изолированных ритмов, следующие: сдвиг одного ритма относительно другого (если ритмы в массиве одинаковы, то такая операция называется *каноном*, или *имитацией*) и растяжение-сжатие одного из ритмов массива по отношению к другим (если изначально ритмы одинаковы, то такая пара операций называется *увеличением-уменьшением*). Непревзойденным мастером использования всех вышеописанных операций в полифонической музыке, безусловно, был и остается Иоганн Себастьян Бах. Массивы, составленные из двух ритмов, можно уподобить лентам, симметрия которых подробно исследована кристаллографами (см., например, фундаментальную монографию А. В. Шубникова и В. А. Копцика *Симметрия в науке и искусстве*, Наука, 1972).

У читателя может возникнуть закономерный вопрос: а под силу ли простому музыканту исполнить те бесконечно разнообразные и зачастую очень сложные ритмы, которые возникают в результате многочисленных манипуляций, описанных в этом очерке? Конечно, нет, за исключением простых случаев. К счастью эту работу за человека может выполнить компьютер. Учащийся школы-интерната “Интеллектуал” Денис Троян разработал очень удобную в обращении компьютерную программу, своеобразный ритмический конструктор, который позволяет автоматически осуществлять все описанные нами операции над ритмами. Возможности программы значительно увеличиваются за счет одновременной работы в нескольких панелях и возможности манипуляций над ритмами в процессе их исполнения. В ближайшее время мы познакомим вас с ней.